Graphes probabilistes

1 Définitions

Définition 1.

Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré dans lequel la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.

Remarque 1. Les poids des arêtes sont des probabilités.

Remarque 2. Les sommets du graphe sont les états possibles du système.

Exemple 1

2 État probabiliste et matrice de transition

Définition 2 (Matrice de transition)**.**

La matrice de transition associée à un graphe probabiliste d'ordre k est la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ d'ordre k telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant k$, $m_{i,j}$ est égal au poids de l'arête orientée d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j si cette arête existe, et est égal à 0 sinon.

Remarque 3. Dans cette matrice tous les coefficients sont positifs ou nuls, et pour chaque ligne la somme des coefficients est égale à 1.

Remarque 4. Cette matrice décrit le passage d'un état au suivant. Le coefficient $m_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n.

Exemple 2

Définition 3 (État probabiliste)**.**

On considère une expérience aléatoire à k issues possibles (k∈).*Achacunedesissuesiestassociéeuneprobabilité*p$_i$.
Après chaque expérience, l'objet étudié se retrouve dans un état donné. On peut alors associer des probabilités à cet état.
On appelle **état probabiliste** à l'étape n, pour tout n entier naturel, la matrice ligne :

$$P_n = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{k-1} & p_k \end{pmatrix}$$

où chaque p_i est égal à la probabilité que l'objet étudié soit à l'état i à la n-ième étape.

Remarque 5. On a, pour tout état probabiliste P_n : $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.

Remarque 6. Un état probabiliste est tout simplement une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles. Cette loi est représentée par une matrice ligne telle que la somme des termes est égale à 1.

Exemple 3

Propriété 1.

Soit M la **matrice de transition** d'un graphe probabiliste d'ordre k, $k \in$ et soit n un entier naturel.

- Si P_n est l'état probabiliste à l'étape n et P_{n+1} l'état probabiliste à l'étape $n+1$, alors :

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

- Si P_0 est l'état probabiliste initial et P_n celui à l'étape n, alors :

$$P_n = P_0 \times M^n$$

-

Exemple 4

3 État stable

Définition 4.

Un état probabiliste P est dit **stable** si, et seulement si, il n'évolue pas lors de la répétition de l'expérience, c'est-à-dire lorsque :

$$P = P \times M$$

où M est la matrice de **transition** du graphe associé.

Exemple 5