



Logarithme décimal

Tronc commun

1 Définition du logarithme décimal



Définition

- Soit b un nombre réel strictement positif.
L'unique solution de l'équation $10^x = b$, d'inconnue x , s'appelle le **logarithme décimal** de b , et se note $\log(b)$. On a alors: $x = \log(b)$.
- La fonction qui, à tout réel $b > 0$, associe l'unique solution de l'équation $10^x = b$ s'appelle **la fonction logarithme décimal**. Elle est notée $\log$.

$$\begin{array}{ccc} \log : &]0 ; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & b & \longmapsto \log(b) \end{array}$$



Propriété

- $10^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log(b)$
- Pour tout réel $b > 0$, $10^{\log(b)} = b$
- $\log(10) = 1$ et $\log(1) = 0$

EXEMPLE 1

Résoudre les équations suivantes:

On donnera la valeur exacte et, si besoin, une valeur approchée au millième.

1. $10^x = 2$
2. $10^x = 0,02$

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes:

1. $5 \times 10^x = 3,375$
2. $3,2 + 2 \times 10^x = 4,5 \times 10^x$
3. $-17,3 + 10^x = 5 - 3 \times 10^x$
4. $3,4 \times 10^x = 5 \times 10^{2x}$
5. $10^x + 4 \times 10^x - 4 = 0$

2 Sens de variation de la fonction logarithme décimal

**Propriété**

- La fonction $\log$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$
- Pour tout réel x strictement positif et tout y réel: $y = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^y$
- Pour tout x de $]0; 1[$, on a $\log(x) < 0$ et, pour tout $x > 1$, on a: $\log(x) > 0$
- Pour tous x et y réels strictement positifs:

$$\log(x) = \log(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\log(x) < \log(y) \Leftrightarrow x < y$$

EXEMPLE 2

Résoudre les inéquations suivantes:

1. $x \log(5) \leq 3$
2. $x \log(0,99) \geq 10$

Exercice 2 : Donner le signe des nombres suivants: $\log(2,5)$, $\log(0,25)$ et $\log\left(\frac{7}{10}\right)$

Exercice 3 : Compléter en utilisant le symbole $<$ ou $>$.

1. $\log(23) \dots \log(10^2)$
2. $\log(0,125) \dots \log(5 \times 10^{-3})$

3 Propriétés algébriques du logarithme décimal**Propriété**

- Pour tout entier naturel n , on a: $\log(10^n) = n$
- Pour tout réel x , on a: $\log(10^x) = x$
- Propriété fondamentale des logarithmes: Pour tous réels strictement positifs a et b , on a:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

**Propriété**

a et b sont deux réels strictement positifs, n un entier naturel et x un réel.

- $\log(a^n) = n \times \log(a)$
- $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$
- $\log(a^x) = x \times \log(a)$
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

EXEMPLES 3

Simplifier les expressions suivantes:

- $\log(10^5)$
- $\log\left(\frac{1}{3}\right)$
- $\log\left(\frac{10^3}{10^4}\right)$

Exercice 4 : Exprimer en fonction de $\log(a)$ et $\log(b)$ les nombres suivants: $\log(a^3)$, $\log(a^{-5})$, $\log\left(\frac{a^2}{b^3}\right)$ et $\log(a^6b^3)$.

Exercice 5 : Résoudre les équations. Donner la valeur exacte de la solution puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

1. $x^{2;2} = 2048$
2. $5, 5^x = 12$

Exercice 6 : Déterminer le plus petit entier n qui vérifie chaque inégalité.

1. $0, 99^n \leq 0, 75$
2. $2, 3^n \geq 5000$
3. $1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n \geq 0, 99$