Intégration - Primitives d'une fonction

Objectifs :
- Apprendre à calculer des primitives des fonctions usuelles.

1 Définition et théorèmes

Définition 1.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Une **primitive** de f sur I est une fonction définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 1

Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Théorème 1 (Admis)**.**

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

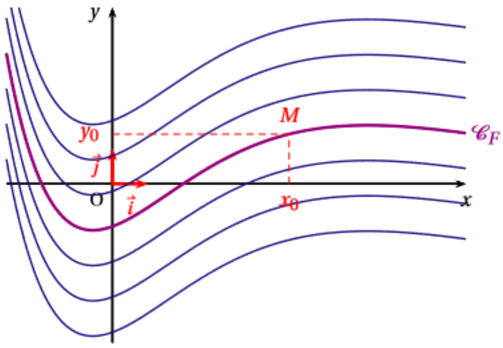
Théorème 2.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par :

$$G(x) = F(x) + k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Exemple 2

Remarque 1. Si l'on connaît la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une primitive de f sur I, alors les courbes des primitives de f sur I se déduisent de $\mathcal{C}$ par une translation de vecteur $k\overrightarrow{j}$ où k est un réel.



Propriété 1.

Soit $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I, il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

Exemple 3

Déterminer la primitive de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$ telle que $F(1) = 0$.

2 Primitives des fonctions usuelles et opérations

Propriété 2 (Primitives des fonctions usuelles)**.**

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F(x) = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

Exemple 4

Propriété 3 (Primitives et opérations sur les fonctions)**.**

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \dfrac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = u'e^u$	$F = e^u$	$x \in I$

Exemple 5

3 Exercices

Exercice 1:
Dans chacun des cas suivants, démontrer que F est une primitive de f.

1. $f(x) = 5 - x$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{x}$
3. $f(x) = (x-1)e^x$
4. $f(x) = e^{1-x}$
5. $F(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2$
6. $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{4} + \ln(x)$
7. $F(x) = (x-2)e^x$
8. $F(x) = -e^{1-x}$

Exercice 2:
Déterminer la primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur 1 en 0.

1. $f_1(x) = e^x$
2. $f_2(x) = 1 - x^2$
3. $f_3(x) = e^x + 1$

Exercice 3:
Trouve la primitive G de g sur I vérifiant la condition donnée :

1. $g_1(x) = x + x^2 - x^3$; $I = \mathbb{R}$ et $G(1) = 0$
2. $g_2(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0\,;+\infty[$ et $G(1) = 1$.

Exercice 4:
Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f_1(x) = x^2 + x^3$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \frac{1}{x} + 1$ sur $]0\,;+\infty[$.
3. $f_3(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.
4. $f_4 = x^5 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.
5. $f_5(x) = \frac{x^2+1}{x}$ $]0\,;+\infty[$.
6. $f_6(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{7}$ $]0\,;+\infty[$.
7. $f_7(x) = \frac{1}{x} + 3e^{3x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
8. $f_8(x) = 3e^x + x^2 + 3$ sur $\mathbb{R}$.