SECOND DEGRÉ

Table des matières

1 Différentes formes d'une fonction polynôme de degré 2

1.1 Forme développée

Définition 1.

Dire qu'une fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme (ou trinôme)** de degré 2 signifie qu'il existe des nombres réels $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a \neq 0}$), $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ tels que, pour tout nombre réel $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Il s'agit de la **forme développée** de $\boldsymbol{f(x)}$.

Exemple 1

La fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 3\left[(x-1)^2 + 2\right]$ est un polynôme de degré 2, car en développant l'expression on obtient : $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

Remarque 1. Les coefficients a, b et c sont **uniques**, ce qui signifie que l'égalité $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, valable pour tout réel x, entraîne que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

1.2 Forme canonique

Propriété 1.

$\boldsymbol{f}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ ($\boldsymbol{a \neq 0}$). $\boldsymbol{f}$ admet une écriture, dite **forme canonique**, telle que pour tout nombre réel $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta}$$

avec $\boldsymbol{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$ et $\boldsymbol{\beta = f(\alpha)}$

Démonstration. Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & ax^2 + bx + c \\ & = & a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + c \\ & = & a\left(x^2 + 2\dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ & = & a\left[\left(x^2 + 2\dfrac{b}{2a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right) - \dfrac{b^2}{4a^2}\right] + c \\ & = & a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}\right] + c \\ & = & a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c \\ & = & a\left(x - \left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a} \\ & = & a\left(x - \left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{array}$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. ■

Remarque 2. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$; alors si $a \neq 0$ la forme canonique du trinôme s'écrit également :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Exemple 2

Soit $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$.
Les coefficients sont : $a = -2$, $b = 8$ *et* $c = 10$. *D'où* $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{-4} = 2$ *et* $\beta = f(\alpha) = f(2) = 18$. *On en déduit que la forme canonique de* f *est :* $-2(x-2)^2 + 18$.

Exercice 1:
Pour chacun des trinômes suivants, calculer α et β. En déduire la forme canonique.

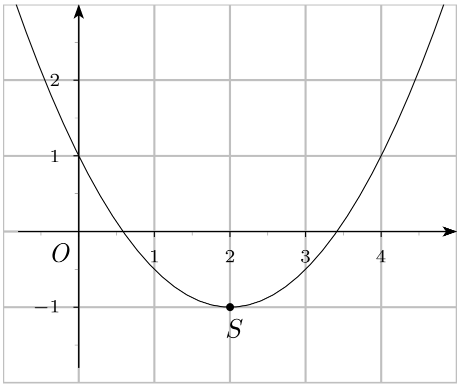
1. $P(x) = 2x^2 - 12x + 3$
2. $Q(x) = 3x^2 + 7x - 1$

Propriété 2.

$\boldsymbol{f}$ est un fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ ($\boldsymbol{a \neq 0}$).
Dans un repère, la **parabole représentative** de la fonction $\boldsymbol{f}$ admet pour sommet le point $\boldsymbol{S}$ de coordonnées $\boldsymbol{(\alpha ; \beta)}$.

Exemple 3

Soit $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$ *avec* $a = 0,5$, $b = -2$ *et* $c = 1$.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 2$ *et* $\beta = f(2) = -1$.
Donc la forme canonique de f *est :* $f(x) = 0,5(x-2)^2 - 1$.
La parabole représentative de f *dans un repère a pour sommet le point* S *de coordonnées* $(2; -1)$.



1.3 Forme factorisée

D'après la propriété 1, on a :
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Définition 2.

Le **discriminant** de $\boldsymbol{f}$ est le nombre réel $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Exemple 4

Calculons le discriminant de la fonction f définie dans l'exemple précédent. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 0,5 \times 1 = 4 - 2 = 2$

Propriété 3.

$\boldsymbol{f}$ est un fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ ($\boldsymbol{a \neq 0}$).

– Si $\boldsymbol{\Delta \geqslant 0}$, alors $\boldsymbol{f(x)}$ admet pour **forme factorisée** :

$$\boldsymbol{f(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}$$

– Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, alors $\boldsymbol{f(x)}$ admet pour **forme factorisée** :

$$\boldsymbol{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$$

Exemple 5

Soit $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$. *Le discriminant est :* $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 64$. *Comme* $\Delta \geqslant 0$, *alors* $f(x)$ *admet pour forme factorisée* $f(x) = 2(x-1)(x-(-3)) = 2(x-1)(x+3)$.

Exercice 2:
Démontrer cette propriété.

Exercice 3:
Factoriser, lorsque c'est possible, les polynômes suivants en facteurs du premier degré.

1. $A(x) = x^2 + 6x + 9$
2. $B(x) = 4x^2 + 8x$
3. $C(x) = 16x^2 - 25$
4. $D(x) = 7x^2 + x - 8$

2 Équations et inéquations du second degré

2.1 Équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Définition 3.

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ sont appelées **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Propriété 4.

Le signe du discriminant $\boldsymbol{\Delta}$ permet de déterminer le nombre de solutions de l'équation $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ avec $\boldsymbol{a \neq 0}$.

– **Si $\boldsymbol{\Delta \geqslant 0}$**, l'équation a **deux solutions distinctes** :

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

et

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

– **Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$**, l'équation admet **une seule solution** (dite racine double).

$$\boldsymbol{x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}}$$

– **Si $\boldsymbol{\Delta \leq 0}$**, l'équation **n'a pas de solution réelle**.

Démonstration. Pour démontrer cette propriété, on va utiliser la forme canonique du trinôme.
D'après la remarque 2 : $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$. Or $a \neq 0$ donc $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$, c'est-à-dire $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, c'est-à-dire, en posant $X = x + \frac{b}{2a}$, on obtient $X^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Notons (E) cette équation.

– Si $\Delta < 0,$ alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. L'équation (E) n'a pas de solution,car un carré est toujours positif ou nul.
– Si $\Delta = 0,$ l'équation (E) s'écrit $X^2 = 0$.
Cette équation admet une seule solution, $X = 0$, c'est-à-dire $x + \frac{b}{2a} = 0$, c'est-à-dire encore $x = -\frac{b}{2a}$.

– Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions, $X_1 = \sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$ et $X_2 = -\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$, c'est-à-dire $X_1 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a^2}}$ et $X_2 = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a^2}}$.

Il nous faut maintenant distinguer deux cas :

– Si $a > 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$; donc les deux solutions sont $X_1 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X_2 = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, c'est-à-dire $x_1 + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Donc l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

– Si $a < 0$, alors $\sqrt{a^2} = -a$.

On obtient de manière analogue deux solutions : $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. ■

Exemple 6

Résoudre l'équation suivante : $4x^2 + 8x - 5 = 0$.
On calcule le discriminant Δ *:* $\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 144$.
On applique ensuite la propriété 4 : $x_1 = \dfrac{-8-\sqrt{144}}{8} = -\dfrac{5}{2}$ *et* $x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{144}}{8} = \dfrac{1}{2}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-5}{2} ; \frac{1}{2} \right\}$$

Exercice 4:
Résoudre chacune des équations suivantes :

a. $2x^2 + 5x - 7 = 0$; b. $x^2 - 2x - 1 = 0$ c. $5x^3 + x + 4 = 0$ d. $2x^2 - 20x + 50 = 0$

2.2 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Propriété 5.

Soit $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ définie sur $\mathbb{R}$ une fonction trinôme (avec $\boldsymbol{a \neq 0}$) et $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ son discriminant.
– Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$, en notant $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ les racines de $\boldsymbol{f}$ (avec $\boldsymbol{x_1 < x_2}$), on a :
  – $\boldsymbol{f(x)}$ est du signe de $\boldsymbol{a}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \left]-\infty ; x_1\right[\cup \left]x_2 ; +\infty\right[$.
  – $\boldsymbol{f(x)}$ est du signe contraire de $\boldsymbol{a}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \left]x_1 ; x_2\right[$.
– Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, en notant $\boldsymbol{x_0}$ la racine de $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f(x)}$ est du signe de $\boldsymbol{a}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{x_0}\}$
– Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$, alors $\boldsymbol{f}$ est du signe de $\boldsymbol{a}$ pour tout réel $\boldsymbol{x}$.

Démonstration.
– **1^er^cas :** $\boldsymbol{\Delta > 0}$.
D'après la propriété 3,pour tout réel x,$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a	

– **2ecas : $\boldsymbol{\Delta = 0}$.**
D'après la propriété 3,pour tout réel x,$f(x) = a(x-x_0)^2$.Or pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $(x-x_0)^2 > 0$,donc $f(x)$ est du signe de a.

– **3ecas : $\boldsymbol{\Delta < 0}$.**
D'après la démonstration de la remarque 2 , pour tout réel x, $f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$.

Or $\Delta < 0$ donc $-\Delta > 0$, et $4a^2 > 0$, donc $\dfrac{-\Delta}{4a^2} > 0$. De plus, pour tout réel x, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, donc $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2} > 0$ et $f(x)$ est du signe de a. ■

Exemple 7

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 8$ définie sur $\mathbb{R}$.
Le discriminant de f est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36$, donc f possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2} = \frac{2-6}{2} = -2 \quad et \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{36}}{2} = 4.$$

Le coefficient de x^2 dans l'expression de $f(x)$, qui vaut 1, étant positif, on en conclut que :

1. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]4\,;\,+\infty[$.
2. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2\,;\,4[$.
3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ *ou* $x = 4$.

Exemple 8

Résoudre l'inéquation $-2x^2 + 4x + 1 > 0$.
Le trinôme $x \longmapsto -2x^2 + 4x + 1$ a pour discriminant $\Delta = 4^2 - 4\tilde{A}(-2)\tilde{A}1 = 16 + 8 = 24$ donc il possède deux racines :

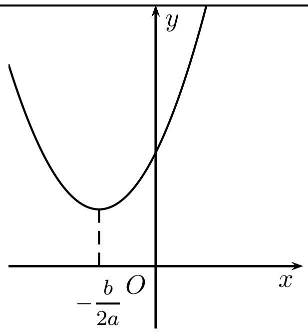
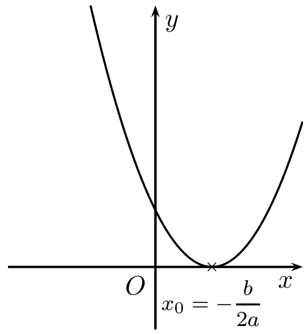
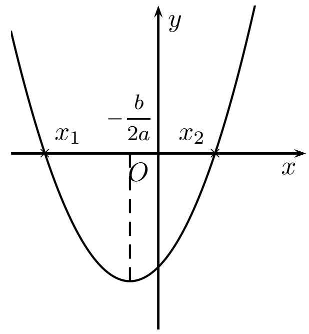
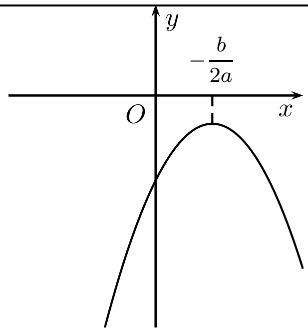
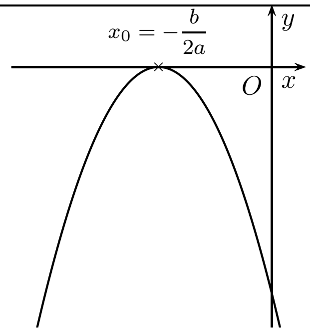
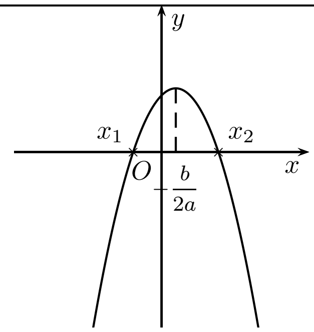
$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{24}}{2\times(-2)} = \frac{-4-2\sqrt{6}}{-4} = \frac{2+\sqrt{6}}{2} \quad et \quad x_2 = \frac{-4+\sqrt{24}}{2\times(-2)} = \frac{-4+2\sqrt{6}}{-4} = \frac{2-\sqrt{6}}{2}.$$

Le coefficient du terme de degré 2 étant négatif, on a :

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{6}}{2}$		$\frac{2+\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+4x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left]\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}\,;\,\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right[$.

3 Bilan

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td colspan="3">$\Delta = b^2 - 4ac$</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c=0$ a une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>$ax^2+bx+c=0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c n'a pas de racine</td><td>ax^2+bx+c a une racine double</td><td>ax^2+bx+c a deux racines</td></tr>
<tr><td>Aucune factorisation</td><td>$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$</td><td>$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Si $a > 0$</td><td colspan="3">
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $-\dfrac{b}{2a}$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c</td><td>↘   ↗</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c > 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \geq 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$
et $ax^2+bx+c \leq 0$ sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Si $a > 0$</td><td colspan="3">
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $-\dfrac{b}{2a}$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c</td><td>↗   ↘</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c < 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \leq 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$
et $ax^2+bx+c \geq 0$ sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
</table>