

POURCENTAGES

Table des matières

1 Proportion et pourcentage d'évolution	1
1.1 Pourcentage d'une partie par rapport à un tout	1
1.2 Évolution exprimée en pourcentage	1
1.3 Expression d'un taux d'évolution en pourcentage à partir d'une évolution	2
2 Évolutions successives et évolutions réciproques	3
2.1 Évolutions successives	3
2.2 Évolution réciproque	4

1 Proportion et pourcentage d'évolution

1.1 Pourcentage d'une partie par rapport à un tout

Définition 1.

Soit A une partie d'un ensemble E .

Si n_E et n_A sont respectivement les nombres d'éléments de E et de A , la **proportion** des éléments de A par rapport à E est le quotient $p = \frac{n_A}{n_E}$.

Remarques 1 Ce nombre p n'a pas d'unité et il est compris entre 0 et 1. Il s'exprime souvent sous forme de **pourcentage**.

Exemple 1

Une classe de 30 élèves contient 21 filles. La proportion de filles dans la classe est $p = \frac{21}{30}$.

Comme $p = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 0,7$, on peut conclure en disant : la proportion de filles dans la classe est de $\frac{7}{10}$, de 0,7 ou de 70%.

Exercice 1:

Dans un lycée, il y a 450 élèves et 30% de ces élèves sont inscrits en classe de 1^{ère} ES.

- Combien d'élèves sont inscrits en classe de 1^{ère} ES ?
- Il y a 81 filles inscrites en 1^{ère} ES. Elles représentent 25% du nombre total de filles du lycée. Combien de filles sont inscrites au lycée ?

1.2 Évolution exprimée en pourcentage

Propriété 1.

t désigne un nombre positif ou négatif.

Si une **évolution de $t\%$** fait passer du nombre $V_0 \neq 0$ au nombre V_1 , alors :

$$V_1 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times V_0$$

On dit que $CM = 1 + \frac{t}{100}$ est le **coefficient multiplicateur** de V_0 à V_1 .

Démonstration

- Soit V_0 la valeur initiale d'une grandeur et V_1 sa valeur finale suite à une augmentation de $t\%$ alors :

$$V_1 = V_0 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

- Soit V_0 la valeur initiale d'une grandeur et V_1 sa valeur finale suite à une diminution de $t\%$ alors :

$$V_1 = V_0 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$$

Exemple 2

Un tableau coûte 1200€. Lors d'une vente aux enchères, son prix **augmente de 25%**. Son nouveau prix P est alors de :

$$P = 1200 + \frac{25}{100} \times 1200 = 1200 \times \left(1 + \frac{25}{100}\right) = 1200 \times 1,25, \text{ soit } P=1500\text{€}.$$

Exemple 3

En 2000, un village comptait 1200 habitants. En 2010, on constate que sa population a **baissé de 10%**. La population P en 2010 est alors de : $P = 1200 - \frac{10}{100} \times 1200 = 1200 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 1200 \times 0,9$, soit $P = 1080$ habitants.

Exercice 2:

1. Un objet coûte 25€
; il diminue de 12%. Quel est son nouveau prix ?
2. Dans un théâtre, entre mardi et mercredi, le nombre de spectateurs a augmenté de 20%.
Il y a 468 spectateurs le mercredi. Quel était le nombre de spectateurs le mardi ?

Propriété 2.

Si le **coefficient multiplicateur** est **supérieur à 1**, alors l'évolution est une **augmentation** (ou une hausse).
Si le **coefficient multiplicateur** est **inférieur à 1**, alors l'évolution est une **diminution** (ou une baisse).

Exemple 4

1,25 est le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 25%.
0,9 est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 10%.

1.3 Expression d'un taux d'évolution en pourcentage à partir d'une évolution**Propriété 3.**

Lorsque l'on passe de V_0 à V_1 , le **taux d'évolution** est : $\frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

En **pourcentage**, le taux d'évolution se note $t\%$ avec : $t = 100 \times \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

Démonstration On note $t\%$ le taux d'évolution de V_0 à V_1 . Alors $V_1 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times V_0$. Donc $1 + \frac{t}{100} = \frac{V_1}{V_0}$ et

$$\frac{t}{100} = \frac{V_1}{V_0} - 1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Propriété 4.

Soit t le taux d'évolution d'une grandeur :
 Si $t > 0$, alors la grandeur est en hausse.
 Si $t < 0$, alors la grandeur est en baisse.

Exemple 5

Un prix passe de 150€ à 180€. Il a subi une augmentation de 20%. En effet :

$$\frac{180 - 150}{150} = \frac{30}{150} = 0,2$$

Exemple 6

La fréquentation moyenne d'un cinéma passe de 800 personnes le samedi à 320 personnes le mardi. Il subit une baisse de 60%. En effet :

$$\frac{320 - 800}{800} = \frac{-480}{800} = -0,6$$

Exercice 3:

Le prix d'un litre d'essence vaut 1,44€ le 1^{er} Janvier. Au 1^{er} Juillet, il vaut 1,26€.

1. Calculer la variation relative du prix entre le 1^{er} Janvier et le 1^{er} Juillet.
En déduire le pourcentage d'évolution du prix de l'essence.
2. Déterminer le coefficient multiplicateur qui permet de passer du prix pratiqué le 1^{er} Janvier au prix pratiqué le 1^{er} Juillet.
En déduire le pourcentage d'évolution du prix de l'essence.

2 Évolutions successives et évolutions réciproques

2.1 Évolutions successives

Propriété 5.

Si le taux d'évolution de V_0 à V_1 est $t_1\%$ et si le taux d'évolution de V_1 à V_2 est $t_2\%$, alors le taux d'évolution global $t\%$ est tel que :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t_2}{100}\right)$$

On dit aussi que le **coefficient multiplicateur global est égal au produit des coefficients multiplicateurs** de chaque évolution.

Démonstration D'après la propriété 1, on a $V_1 = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times V_0$ et $V_2 = \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) \times V_1$.

Ainsi $V_2 = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) \times V_0$

Par identification des deux relations :

$$V_2 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times V_0 \quad V_2 = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) \times V_0$$

on obtient :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t_2}{100}\right)$$

Exemple 7

Entre 2008 et 2009, le SMIC (Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance) a augmenté de 1,26% ; entre 2009 et 2010 il a augmenté de 0,45% (source : Insee). Son taux d'évolution global entre 2008 et 2010 vérifie :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(1 + \frac{1,26}{100}\right) \times \left(1 + \frac{0,45}{100}\right)$$

soit $1 + \frac{t}{100} \approx 1,02$. Donc $\frac{t}{100} \approx 0,02$, soit un taux d'évolution global d'environ 2%.

Remarques 2 On généralise ce résultat à plusieurs évolutions successives.

Exercice 4:

Deux usines chimiques ont réalisé le même chiffre d'affaire en 2007.

1. Le chiffre d'affaires de la société Rhubans a augmenté de 4% en 2008 et baissé de 3% en 2009 et enfin augmenté de 2% en 2010.
Déterminer le taux d'évolution global du chiffre d'affaires de 2007 à 2010.
2. Le chiffre d'affaires de la société Adhé a diminué de 3% en 2008 et diminué de 4% en 2009 et enfin augmenté de 2% en 2010.
Déterminer le taux d'évolution global du chiffre d'affaires de 2007 à 2010.

2.2 Évolution réciproque**Définition 2.**

L'évolution réciproque d'une évolution de la valeur V_0 à la valeur V_1 est l'évolution de la valeur V_1 à la valeur V_0 .

Propriété 6.

Si le taux d'évolution de V_0 à V_1 est $t\%$, alors le taux d'évolution réciproque $t'\%$ de V_1 à V_0 est tel que :

$$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}}$$

Démonstration $V_1 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times V_0$, donc $V_0 = \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{100}}\right) \times V_1$, donc le pourcentage d'évolution $t'\%$ de V_1

à V_0 est tel que : $1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}}$.

Exemple 8

Le prix d'un produit d'usage courant vient de baisser de 10%.

Le taux réciproque d'évolution vérifie :

$$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 - \frac{10}{100}}, \text{ soit } 1 + \frac{t'}{100} \approx 1,111 \text{ donc } \frac{t'}{100} \approx 0,111 \text{ c'est-à-dire } t' \approx 11,1\%.$$

Cela signifie que, pour que le prix de ce produit revienne à son prix initial, il faudrait qu'il augmente d'environ 11,1%.

Exercice 5:

Le prix de vente d'un objet a augmenté de 28% le 1er juillet. Le 6 juillet, le vendeur veut accorder à un fidèle client une réduction sur le nouveau prix de vente de telle sorte que le prix à payer par le client soit identique à celui pratiqué avant le 1er juillet.

Quel pourcentage de réduction doit-il consentir ?